Lycée Pilote de Gabes	Devoir de synthèse n ° : 2	Classes : 4M 1&2
Profs: H.Abderrahim et H.Dhiaf	Le 02/03/2010	Mathématiques 4h

Exercice n ° : 1 (3 points)

1°) Soient a et b deux entiers et n un entier naturel non nul

a) Démontrer la propriété suivante : si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$.

b) La réciproque de la propriété précédente est-elle vraie ? Justifier

2°) a) Déterminer le reste de la division de 2011 par 11

b) Déterminer le reste de la division de 2^{10} par 11.

c) Déterminer le reste de la division de $2^{2010} + 2011$ par 11.

3°) On désigne par p un entier naturel. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $A_n = 2^n + p$.
On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.

a) Montrer que d_n divise 2^n.

b) Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p.

c) En déduire le PGCD de $2^{2010} + 2011$ et $2^{2011} + 2011$

Exercice n ° : 2 (3 points)

Soit l'équation différentielle (E) : y' = - 10y + 6 où y désigne une fonction dérivable sur IR.
1°) Résoudre l'équation (E).
2°) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.
3°) Aux bornes d'une bobine de résistance R (exprimée en ohms) et d'inductance L (exprimée en henrys) on branche à la date t = 0, un générateur de force électromotrice E (exprimée en volts).
L'unité du temps est la seconde.
L'intensité du courant dans le circuit (exprimée en ampères) est une fonction du temps, dérivable et notée i.
A la date t = 0, l'intensité est nulle. Au cours de l'établissement du courant la fonction i est solution de l'équation différentielle L.i' + R.i = E. On prend R = 5 , L = $\frac{1}{2}$ et E = 3.

a) Déterminer l'expression de i(t) en fonction de $t \geq 0$.

b) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} i(t)$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice n ° : 3 (3 points)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle fixe de centre O, deux diamètres perpendiculaires [AA'] et [BB'] et N un point qui décrit le cercle $\mathcal{C}$ sauf les points A et A'. Soit K le projeté orthogonal de N sur (BB'). On appelle M le point d'intersection des droites (ON) et (AK).

On munit le plan du repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ et on pose $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}}\right)[2\pi]$

1°)a) Vérifier que les coordonnées du point N sont $(\cos\theta, \sin\theta)$.

b) Montrer que les coordonnées du point M sont : $\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}, \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

2°) Soit P l'ensemble sur lequel varie le point M lorsque N varie sur le cercle $\mathcal{C}$ privé des points A et A'.

a) Vérifier que $\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2$ et $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$

b) En déduire une équation cartésienne de P.

c) Montrer alors que P est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice

Exercice n ° : 4 **(5 points)**

Dans la figure représentée sur la page (3/3)

- Γ est un cercle de diamètre [AC] et de centre O
- B est un point de Γ distinct de A et de C.
- D est le point tel que le triangle BCD est équilatéral direct.

I) 1°) Soit G le centre de gravité du triangle BCD et le point M intersection des droites (AB) et (CG).

a) Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC]

b) Montrer que le point G est le milieu du segment [CM].

2°) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe S de centre C et qui transforme B en M.

II) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ choisi de telle sorte que A et C ont pour affixes respectives -1 et 1.

1°) Déterminer l'affixe du point E tel que le triangle ACE est équilatéral direct.

2°) Soit σ la similitude directe d'expression complexe: $z'=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{4}.z+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}$

Déterminer les éléments caractéristiques de σ. Déduire que σ est la réciproque de S.

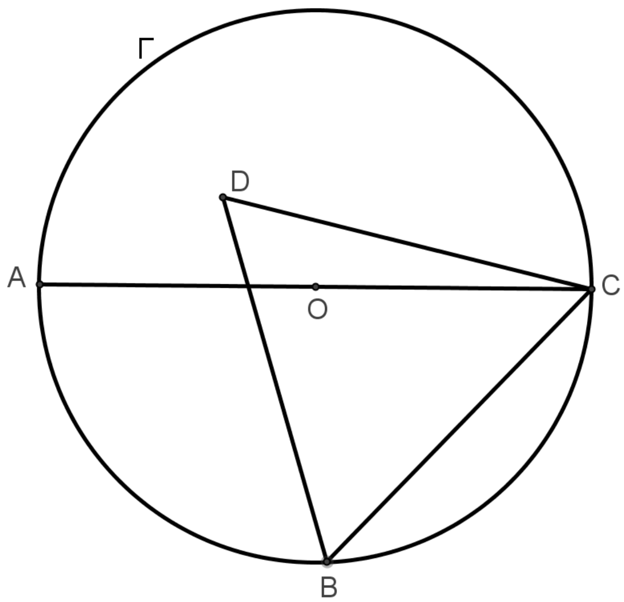
3°) Déterminer l'affixe du point E' image de point E par σ. Montrer que E' est un point de Γ.

4°) On désigne par Φ l'ensemble des points M lorsque B décrit le cercle Γ privé des points A et C.

a) Montrer que E appartient à Φ.

b) Soit O' l'image de O par la similitude S. Démontrer que O' est le centre de gravité du triangle ACE.

c) Déterminer Φ.



Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

Exercice n ° : 5 **(6 points)**

I°) 1°) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : g(x) = $\sqrt{e^{2x}-1}$

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Dresser le tableau de variation de g.

2°) Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $G(x)=g(x)-\int_0^{g(x)}\frac{dt}{1+t^2}$

a) Montrer que G est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $G'(x)=g(x)$

b) Montrer alors que pour tout réel strictement positif x, $\int_0^x g(t)dt=g(x)-\int_0^{g(x)}\frac{dt}{1+t^2}$

c) On admet que $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$. Déduire que $\int_0^{\ln\sqrt{2}}g(t)dt=1-\frac{\pi}{4}$

II°) Pour tout n ∈ IN*, on pose : $I_n=\int_0^{\ln\sqrt{2}}\left(g(x)\right)^n dx$ et $I_0=\ln\sqrt{2}$

1°)a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel positif x, on a:

$$\left(g(x)\right)^n+\left(g(x)\right)^{n+2}=\frac{1}{2}U'(x).\left(U(x)\right)^{\frac{n}{2}} \text{ où } U(x)=e^{2x}-1$$

b) Montrer alors que pour tout n ∈ IN, on a : $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+2}$.

c) Montrer que la suite $\left(I_n\right)_{n\in IN}$ est décroissante et déterminer sa limite.

2°) Pour tout n ∈ IN*, on pose : $U_n=I_{n+4}-I_n$.

a) Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n}U_{4k+1}=I_{4n+5}-I_1$

b) Vérifier que pour tout n ∈ IN, $U_n=\left(I_{n+4}+I_{n+2}\right)-\left(I_{n+2}+I_n\right)$. En déduire que $U_n=\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+2}$.

c) Exprimer alors U_{4n+1} en fonction de n.

d) Calculer la limite lorsque n tend vers +∞ de la somme $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+....+\frac{-1}{4n+3}+\frac{1}{4n+5}$

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...